Topologie et Analyse Fonctionelle

Exercice 1 (Suites de Cauchy)**.**

1. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer qu'elle est de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$ pour tous $m, n \geq N$.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

(a) Montrer que (x_n) est bornée.

(b) Montrer que $u_n = \sup_{k \geq n} x_k$ définit une suite décroissante. En déduire que $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de (x_n) : pour tous $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

(c) Montrer que (x_n) converge vers ℓ.

Exercice 2. Montrer qu'une suite $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ converge si et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 3 (Convergence uniforme)**.**

Soient $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions continues, vérifiant le critère de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N,\ \forall x \in [0,1], \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in N$ tel que pour tous $n \geq N$ et $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
3. Montrer que f est continue.

Exercice 4 (Fonctions Lipschitziennes, uniformément continues, continues)**.**

1. Soit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne :
   Il existe $K > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ pour tous $x, y \in [0,1]$.
   Montrer que f est uniformément continue :
   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ t.q. $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
2. Donner un exemple de fonction uniformément continue qui ne soit pas Lipschitzienne.
3. Montrer que toute fonction $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue est continue.
4. Montrer que si $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, alors il existe $\epsilon > 0$, $x \in [0,1]$ et deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ convergeant toutes deux vers x et vérifiant $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que toute fonction continue sur $[0,1]$ est uniformément continue.
6. Donner un exemple de fonction continue sur $]0,1[$ qui ne soit pas uniformément continue.

Exercice 5 (Normes sur $\mathbb{R}^n$)**.**

Pour $p \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on note $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

1. Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tous $a, b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(On pourra étudier la fonction $a \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$.)

2. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Si x et y sont non nuls on pourra appliquer la question précédente à $a = |x_k|/\|x\|_p$ et $b = |y_k|/\|y\|_q$ puis sommer.)

3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire (Minkowski) et définit donc une norme sur $\mathbb{R}^n$.
4. Représenter graphiquement l'allure des boules unités

$$B^{\|\cdot\|_p} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p < 1 \right\},$$

pour $p \geq 1$. Ces normes sont elles équivalentes ?

Exercice 6 (Ouverts d'un espace vectoriel normé)**.**
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie $U \subset E$ est un ouvert si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r) = \{y \in E \colon \|x - y\| < r\}$ soit incluse dans U.

1. Montrer que pour tous $x \in E$ et $r > 0$, la boule $B(x, r)$ est un ouvert.
2. Montrer qu'une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
4. Donner un exemple d'intersection dénombrable d'ouverts qui ne soit pas un ouvert.

Exercice 7 (Continuité et ouverts)**.**
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Une application $f \colon E \to F$ est continue si pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \delta) \subset E$ on ait $f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subset F$.

1. Soit $f \colon E \to F$ une application continue. Montrer que pour tout ouvert $U \subset F$, l'image réciproque $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.
2. Réciproquement, montrer que si $f \colon E \to F$ est telle que l'image réciproque de tout ouvert de F soit un ouvert de E, alors f est continue.

Exercice 8 (Identité du parallélogramme)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Montrer que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in E.$$

Exercice 9 (Famille orthonormée)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille orthonormée : pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in E$. Calculer $\langle x, u_i \rangle$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Montrer que la famille $(u_i)_i$ est libre.
3. Soit $P \colon E \to E$, $x \mapsto \sum_{i=1} \langle u_i, x \rangle u_i$. Montrer que P est une projection linéaire (i.e. $P \in \mathcal{L}(E)$ et $P^2 = P$) et que $\langle x - P(x), u_i \rangle = 0$ pour tous $x \in E$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Montrer que $\|x\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + \|P(x)\|^2$ et en déduire l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle^2 \leq \|x\|^2 \qquad \forall x \in E.$$