Algèbre Linéaire

Exercice 1. 1) Démontrer la formule de Grassmann : pour tout sous-espaces F et G de E de dimension finie, $\dim(E) + \dim(F) = \dim(F+G) - \dim(F \cap G)$.

2) Démontrer le théorème du rang.

Exercice 2. 1) Soit E un espace vectoriel de dimension 2, $\det : E^2 \to \mathbf{k}$ le déterminant par rapport à une base de E fixée. Démontrer en utilisant les propriétés axiomatiques du déterminant (c'est une forme multilinéaire alternée) la formule

$$\det(x.e_1, x'.e_1 + y.e_2) = xy \det(e_1, e_2),$$

valable pour tous vecteurs $e_1, e_2 \in E$ et scalaires $x, y \in \mathbf{k}$.

2) En déduire la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire.

Exercice 3. Soit E, F deux espaces vectoriels.

1) Soit E' un sous-espace vectoriel de E, $u \in \mathcal{L}(E', F)$. On suppose que E' possède un supplémentaire dans E. Montrer qu'il existe $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\tilde{u}|_{E'} = u$.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose u injective, et $\operatorname{im}(u)$ possède un supplémentaire dans F. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \operatorname{Id}_E$.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose u surjective, et $\ker(u)$ possède un supplémentaire dans E. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ v = \operatorname{Id}_F$.

Exercice 4. 1) Démontrer que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. Voyez-vous une évidence géométrique pour ce résultat ?

2) Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectivement. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la matrice de l'application linéaire ${}^\mathsf{T}f : \ell \in F^\vee \mapsto (\ell \circ f) \in E^\vee$ dans les bases $\mathcal{B}_F^\vee$ et $\mathcal{B}_E^\vee$ en fonction de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Exercice 5. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de rang r de vecteurs de E. Montrer que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}^n : \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbf{k}^n$ de dimension $n - r$.