Analyse réelle de base

1 Limites

Quantificateurs

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.
2. Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a < b + \varepsilon$, alors $a \leq b$.
3. Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a - b| < \varepsilon$, alors $a = b$.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f admet l comme limite en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a $|f(x) - l| < 2\epsilon$.

Exercice 3. Soient $a, l \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

1. f ne tend pas vers l quand x tend vers a,
2. f ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$,
3. f ne tend pas vers $+\infty$ en a,
4. f n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + T) = f(x)$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 5. Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de D. On considère deux fonctions $f, g : D \to R$.

1. On suppose que $f \leq g$ et que f tend vers $+\infty$ en a. Montrer que g tend vers $+\infty$ en a.
2. On suppose maintenant que f est bornée et que g tend vers 0 en a. Montrer que la fonction fg tend vers 0 en a.

Borne Sup

Exercice 6. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On note $-A$ l'ensemble $\{-a; a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup A$.

Exercice 7. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup A \leq \sup B$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 8. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ avec $\sup A + \sup B$.

Exercice 9. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers $+\infty$.

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On pose $A = \{x \in [0,1] : f(x) \leq x\}$. Montrer que

1. $A \neq \emptyset$,
2. Si $x \in A$, alors $f(x) \in A$,
3. A possède une borne inférieure $a \in [0,1]$,
4. $f(a) = a$.

On a donc montré que toute application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ possède un point fixe.

Calcul de limites

Exercice 11. La limite en 0 des fonctions suivantes existe-t-elle et si oui, que vaut-elle ?

1. $x \in]0,+\infty[\mapsto \sin \frac{1}{x}$,
2. $x \in]0,+\infty[\mapsto x \sin \frac{1}{x}$

Exercice 12. Soient $n, p \in \mathbb{N}_*$. On considère les fonctions polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n b_p > 0$. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$. En déduire que $+\infty$ est une extrémité de D. Discuter selon n et p la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13. Montrer que les fonctions suivantes ont une limite en $+\infty$ et calculer ces limites.

1. $x \mapsto \sqrt{x} - x$,
2. $x \mapsto \exp(\sqrt{x} - x)$,
3. $x \mapsto 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)$,
4. $x \mapsto \frac{1+\exp x}{1-\exp x}$,
5. $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$,
6. $x \mapsto \sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2}$, où a est un réel strictement positif fixé,
7. $x \mapsto x(\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2})$, où a est un réel strictement positif fixé,
8. $x \mapsto \frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{x^3+2}}$,
9. $x \mapsto \tan \frac{(\pi+x)(1-\pi x)}{(1-2x)^2}$,
10. $x \mapsto \sqrt{x} + \sin x$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x) - x$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - x| \leq M$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite en $+\infty$.

Exercice 15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^3 + ax + b} - x\sqrt{x}$. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^3+8}{x+2}$ a une limite finie en -2.

Exercice 17. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et telle que

1. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$,
2. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \pi$,
3. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -\infty$,
4. $x \mapsto f(x) - x$ n'ait pas de limite en $+\infty$.

Exercice 18. La fonction $x \mapsto x \sin x$ a-t'elle une limite en $+\infty$?

Limites à droite ou à gauche

Exercice 19. On considère la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0, \\ 0 \text{ si } x = 0, \\ 1 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Déterminer si H a une limite à gauche, à droite ou une limite tout court en 0.

Exercice 20. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, admettent-elles des limites à gauche, à droite, ou des limites aux points indiqués ?

1. $f_1(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f_1(0) = 1$, limites en 0,
2. $f_2(x) = \frac{sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f_2(0) = 1$, limites en 0,
3. $f_3(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ où E est la fonction partie entière, limites en $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 21. Les fonctions suivantes, définies sur $]0,1[$, admettent-elles des limites à droite en 0 et à gauche en 1 ?

1. $f_1(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$,
2. $f_2(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$,
3. $f_3(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ où $a > 0$ est un paramètre fixé,
4. $f_4(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

1.1 Utilisation d'équivalents ou de développements limités

Exercice 22. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

a une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.

Exercice 23. Soit $0 < \alpha < 1$. Calculer la limite de $f(x) = (x+3)^\alpha - (x+1)^\alpha$ en $+\infty$.

Exercice 24. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x.$$

2 Fonctions continues sur un intervalle

Prolongement par continuité

Exercice 25. On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est continu sur son domaine de définition. Peut-on prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$?

Exercice 26. Les fonctions suivantes peuvent-elle être prolongées par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $x \mapsto \frac{x^3-8}{x-2}$,
2. $x \mapsto \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|}$,

Exercice 27. Soient $a < b$ deux réels et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application strictement croissante. On pose $A = \{f(x); x \in]a,b[\}$, $\alpha = \inf A, \beta = \sup A$ (si A est non minorée, on pose $\alpha = -\infty$, si A est non majorée, on pose $\beta = +\infty$).

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in]a,b[$. Montrer que f admet une limite à droite en c notée $f_d(c)$ et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \le f(c) \le f_d(c)$.
3. On suppose que $f_g(c) = f_d(c)$ pour tout $c \in]a,b[$. Montrer que f est continue sur $]a,b[$.

Continuité et développements limités

Exercice 28. Montrer que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^*$, se prolongent par continuité en 0 :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos x)$,
2. $g : x \mapsto \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$,
3. $h : x \mapsto \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$,
4. $i : x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 29. On définit f sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 puis donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Exercice 30. On définit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 puis que f admet un développement limité en 0 à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Calcul différentiel

Exercice 31.
1. Soit n un entier ≥ 2 et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$
En déduire que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en a et calculer sa dérivée.
2. Même question lorsque n est un entier ≤ -2.

Exercice 32. On considère la fonction : $x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

1. Quel est son domaine de définition ?
2. Cette fonction admet-elle des limites aux extrémités de son domaine de définition ? Si oui, que valent ses limites ?
3. Cette fonction est-elle dérivable ?

Exercice 33. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée :
$$x \mapsto \exp f(x) \quad ; \quad x \mapsto (f(\sin x))^2 \quad ; \quad x \mapsto (f(x))^3.$$

Exercice 34.
1. Soient n et p des entiers positifs. Calculer la limite de $x \mapsto \frac{x^n - x^p}{x-1}$ en 1.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 1 et soit n un entier strictement positif. Calculer la limite de $x \mapsto \frac{f(x^n) - f(x)}{x-1}$ quand x tend vers 1.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\frac{(f(2x))^2 - f(3x^2)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Applications du théorème des accroissements finis

Exercice 35. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 36. Soient $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Montrer que l'on a $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|$.

Exercice 37. Etudier le sens des variations des fonctions f et g définies sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$. En déduire que l'on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 38.
1. Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.

Exercice 39. Soit $p \in \mathbb{N}_*$.
1. Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour valeur maximale 2^{p-1}.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que l'on a
$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Exercice 40. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n : x \in [0, 1] \mapsto (1 - x)(1 + x)^n$.
1. Etudier les variations de la fonction f_n.
2. Montrer qu'il existe un unique nombre $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
3. Montrer que x_n et x_{n+1} appartiennent à un même intervalle sur lequel la fonction f_n est décroissante.
4. Montrer que l'on a $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 41.
1. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,
$$\ln(n + 1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$
3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Exercice 42. Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe k réels distincts appartenant à I en lesquels f s'annule, k étant un entier ≥ 2. Démontrer qu'il existe au moins $k - 1$ réels distincts appartenant à I en lesquels f' s'annule.

Exercice 43. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et P le polynôme $P(x) = x^n + ax + b$.
1. Combien le polynôme P' a-t'il de racines réelles ?
2. Montrer que le polynôme P a au plus deux racines réelles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair.

Exercice 44. Soit f une fonction dérivable. On suppose que la fonction f' est bornée. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+|x|}$ est bornée.

Exercice 45. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On suppose que $f' : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ admet une limite en 0 notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$.

Exercice 46. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f, g sont continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, et que $g'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in]a, b[$.

1. Montrer que pour tout $x \in]a, b]$, on a $g(x) - g(a) \neq 0$.
2. On note $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = f(x) - pg(x), x \in [a, b]$. Montrer que $u(a) = u(b)$. en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. On note l cette limite. Montrer que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l.$$

Exercice 47. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on suppose que $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ à droite en a. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en a.

Exercice 48. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et f est dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Posons $b = \exp(-a)$.

1. Soit $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = f(-\ln x)$ si $x \neq 0$. Montrer que g est continue.
2. Calculer $g(b)$. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0, b[$ et calculer $g'(x)$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Commentaire ?

Formules de Taylor et développements limités

Exercice 49.
1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle entre un point x et le point 0 et à l'ordre n.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{a^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$e^x = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}).$$

Exercice 50. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
1. $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$
2. $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^4}{4!}$
3. $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}| \leq \frac{x^6}{6!}$

Exercice 51. Montrer que si $f \in C^n(I)$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I. Quels sont les coefficients de ce développement limité ?

Exercice 52.
1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.
2. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et que pourtant f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 53. Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle de classe C^1 ?
2. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 54. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

Exercice 55.

1. Développement limité de $x \mapsto \exp(x-1)$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le développement limité de $x \mapsto \exp x$ à l'ordre 3 au point -1.
2. Développement limité de $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 au point 4.
3. Développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln x$ au point e.
4. Développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \arctan \frac{1}{1-x}$ au point 0.
5. Développement limité à l'ordre 7 de $x \mapsto x^4 - 1$ au point 0 puis au point -1.
6. Développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin x - \cos x + \tan x + \frac{1}{1-x}$ au point 0.
7. Développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln \sin x$ au point $\frac{\pi}{2}$.
8. Développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$ au point 0.
9. Développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto e^{\cos x}$ au point 0.

Exercice 56. Soit $n \geq 1$ et $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f à l'ordre n en 0 (donc P est un polynôme de degré n et la fonction ε tend vers 0 en 0). Montrer que si f est paire (resp. impair), alors P est pair (resp. impair).

Exercice 57. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de

$$\frac{f(x) + f(-x)}{x^2}$$

quand x tend vers 0.

Exercice 58. Soit f une fonction qui admet un développement limité en 0 à l'ordre n : il existe un polynôme P de degré n et une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que pour tout $x \in I$, on a $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$. On suppose que f admet une primitive F. Le but de cet exercice est de montrer que F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré $n+1$ tel que $Q' = P$ et $Q(0) = F(0)$.
2. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $F - Q$ entre un point $x \neq 0$ et 0 puis conclure.

Exercice 59. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$. On dit que f admet un minimum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on a $f(x) \geq f(a)$.

1. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.

2. Montrer que si f vérifie : $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple de fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tels que $f'(a) = 0 = f''(a)$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 60. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x.$$

1. Calculer en fonction de a la limite de f en 0. En déduire que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite, on note de nouveau f ce prolongement à $\mathbb{R}$. On note C_f le graphe de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser en fonction de a la dérivée de f en 0.
4. Donner la tangente à C_f en $(0, f(0))$ et préciser en fonction de a la position locale de C_f par rapport à cette tangente.

Fonctions C^∞

Exercice 61. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est $C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer son développement limité à tout ordre en 0. Conclusion ?

Exercice 62. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1, \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$,
2. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$,
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n tels que pour tout $x \in]-1, 1[$
   $$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
   On ne demande pas de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f^{(n)}(x) = 0$.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (Penser au théorème de prolongement dérivable !)
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement limité de f à l'ordre n au point 1.

Exercice 63. On définit pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité à 0. On note encore f le prolongement.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Est-ce que $f \in C^1([0, +\infty[)$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,
   $$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}.$$
   En déduire que $f \in C^\infty([0, +\infty[)$.
4. On prolonge f par parité à $\mathbb{R}$. On note encore f le prolongement. A-t'on $f \in C^\infty(\mathbb{R})$?