Calcul différentiel

Différentiabilité

Exercice 1. Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité en $(0,0)$, l'existence de $\partial_x f(0,0)$ puis $\partial_y f(0,0)$, et enfin la différentiabilité en $(0,0)$.

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
- $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
- $f(x,y) = \dfrac{\sin x^4 + \cos y - 1}{x^2+y^2}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 2. Etudier la différentiabilité des applications

$$(x,y) \mapsto |x| + |y|, \quad (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$$

sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On pose

$$f(x,y) = \frac{\exp(-1/(x^2y^2))}{\exp(-1/x^4) + \exp(-1/y^4)}, \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

Montrer que, pour tout n, p: $\partial_x^n \partial_y^p f(0,0)$ existe et vaut 0, alors que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4. On pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

Montrer que, pour tout n, p tel que $n + p \leq 2$: $\partial_x^n \partial_y^p f(0,0)$ existe. Montrer que $\partial_{xy}^2 f(0,0) \neq \partial_{yx}^2 f(0,0)$.

Exercice 5. Montrer que le carré de la norme euclidienne est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, calculer ses différentielles successives.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Montrer que $f \circ \phi$ est de classe C^1, calculer sa dérivée.

Valeurs intermédiaires et accroissements finis

Exercice 7 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Soit $f \colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. On dit que f vérifie la *propriété des valeurs intermédiaires sur* Ω si pour tout intervalle $[a,b] \subset \Omega$ et tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on peut trouver $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Construire une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires mais qui n'est pas continue.

3. Montrer la réciproque partielle suivante: si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et

$$\forall y \in \mathbb{R}\colon\ f^{-1}(\{y\}) \text{ est fermé}$$

alors f est continue.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2.$$

Exercice 9 (Accroissements finis)**.**
Dans ce qui suit, E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $f\colon E \to F$.

1. On suppose que $E = \mathbb{R}$.
   (a) Énoncer l'égalité des accroissements finis lorsque $F = \mathbb{R}$.
   (b) Donner un contre-exemple lorsque $F \neq \mathbb{R}$.
   (c) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est continue en a, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que
   $$\lim_{x \xrightarrow{\neq a} a} g'(x) = 0.$$
   Montrer que g est dérivable en a avec $g'(a) = 0$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$.
   (a) Énoncer l'inégalité des accroissements finis dans ce cadre.
   (b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$. On suppose que f est continue sur U et différentiable sur $U \setminus \{a\}$ et qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que
   $$\lim_{x \to a} \mathrm{Jac}_f(x) = A.$$
   Montrer que f est différentiable en a et que $\mathrm{Jac}_f(a) = A$. **Indication**: on pourra considérer la fonction g définie par
   $$g(x) = f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)$$
   et mettre à profit une inégalité des accroissements finis pour g.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$|\nabla f(x)| \leq C|f(x)|.$$

pour un certain $C > 0$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $|\phi'(t)| \leq C|\phi(t)|$, pour tout $t \geq 0$. Montrer que
   $$|\phi(t)| \leq |\phi(0)|e^{Ct}.$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, notons $\phi(t) = f(a + t(x - a))$. Calculer $\phi'(t)$.
3. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
   $$|f(x)| \leq |f(a)|e^{C|x-a|}.$$

Convexité

Exercice 11 (Fonctions convexes)**.**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\colon E \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est *convexe* si:

$$(*) \qquad \forall x, y \in E, \forall t \in [0,1]\colon f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

1. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si f est convexe alors $f'' \geq 0$. **Indication**: une manière de procéder consiste à prendre $a \in \mathbb{R}$, puis à écrire le développement limité de f à l'ordre 2 en a pour réécrire $(*)$ avec $t = \frac{1}{2}$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f'' \geq 0$ alors f est convexe. **Indication**: étudier les variations de la différence entre les membres de $(*)$ vue comme une fonction de t.
2. On suppose cette fois que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   (a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante portant sur ses dérivées partielles pour que f soit $\mathcal{C}^2$.
   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est positive. **Indication**: on pourra remarquer que l'inégalité $(*)$ concerne la restriction de f à une droite et reprendre ce qui précède.

Divers

Exercice 12 (Théorème de Poincaré)**.**

Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On suppose $\partial_y P = \partial_x Q$ et on souhaite montrer l'existence de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que $\nabla f = (P, Q)$.

1. Montrer que, pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, avec $f(0) = 0$ on a, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$:
$$f(X) = \int_0^1 \nabla f(tX).X dt.$$
2. Revenant à l'exercice, montrer que, nécessairement, si $f(0) = 0$ et $\nabla f = (P, Q)$, on a
$$f(x, y) = \int_0^1 \Big(xP(tx, ty) + yQ(tx, ty) \Big) dt.$$
3. Montrer que, sous les hypothèses de l'exercice, la fonction f définie par la formule précédente vérifie bien $\nabla f = (P, Q)$.
4. Combien le problème a-t-il de solutions?

Exercice 13 (Coercivité)**.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$. On considère une application $f\colon E \to E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et qui vérifie:

$$\forall (x, y) \in E^2\colon \|f(x) - f(y)\| \geq \lambda \|x - y\|.$$

1. Montrer que f est injective et fermée (transforme tout fermé en un fermé).
2. Montrer que f est un difféomorphisme local et ouverte (transforme tout ouvert en un ouvert).
3. En déduire que f est un difféomorphisme de E dans lui-même qui vérifie
$$\sup_{a \in E} |||df^{-1}(a)||| \leq \frac{1}{\lambda}.$$
   On rappelle que pour $g \in \mathcal{L}(E)$, la norme d'opérateur $||| \cdot |||$ peut être définie par exemple par
$$|||g||| = \sup_{\|x\|=1} \|g(x)\|.$$