Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy

$$u' = |u|, \quad u(0) = u_0.$$

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy

$$u' = u^2, \quad u(0) = u_0.$$

Discuter selon le signe de u_0.

Exercice 3. Résoudre le problème de Cauchy

$$u' = 1 - u^2, \quad u(0) = u_0 \in [0, 1].$$

Exercice 4. Trouver toutes les solutions au problème de Cauchy

$$u' = \sqrt{u}, \quad u(0) = 0.$$

Exercice 5. Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on considère le problème de Cauchy

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0.$$

1. Montrer que $u(t) = e^{-at}u_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s) ds$.
2. On suppose $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.
3. On suppose $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = \dfrac{l}{a}$.
4. On suppose f 1-périodique en t. Montrer l'existence d'une fonction 1-périodique $l(t)$ telle que $\lim(u(t) - l(t)) = 0$.

Exercice 6. Résoudre le problème de Cauchy

$$u' + a(t)u = f(t), \quad u(0) = u_0.$$

Exercice 7.

1. Montrer que, si u vérifie l'équation

$$u' + a(t)u = 0,$$

alors u ne peut s'annuler nulle part sauf si u est identiquement nulle.

2. Montrer que, si a est continue et u vérifie l'inéquation, pour tout $t > 0$:

$$u' + a(t)u > 0, \quad u(0) = 0,$$

alors u est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8. Soit $u(t)$ la solution du problème

$$u' + u^2 = t, \quad u(0) = 0$$

dont on suppose qu'elle existe.

1. Montrer que $u(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
2. En considérant $v(t) = \sqrt{t} - u(t)$, montrer que $u(t) \leq \sqrt{t}$.

Exercice 9. Résoudre le problème de Cauchy

$$-u'' + \alpha u = 0, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1.$$

Discuter le comportement $t \to +\infty$ des solutions en fonction de α.

Exercice 10. Considérons une solution de l'équation $u'' + a(t)u = 0$. Soit t_0 un zéro de u.

1. Supposons qu'il existe $(t_n)_n$, suite de zéros de u tendant vers t_0 avec $t_n \neq t_0$ pour tout n.
   Montrer que $u'(t_0) = 0$.
2. En déduire que, si u est non nulle, alors t_0 est un zéro isolé.

Exercice 11. Résoudre le système différentiel

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0,$$

pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $H : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On considère le système différentiel d'inconnues (γ, p):

$$\begin{cases} \gamma' = & \partial_p H(\gamma, p), \\ p' = & -\partial_\gamma H(\gamma, p). \end{cases}$$

Montrer que, si (γ, p) est une solution, alors la fonction $t \mapsto H(\gamma(t), p(t))$ est constante.

Applications: écrire le système différentiel dans les deux cas suivants et donner une conséquence de la propriété ci-dessus.

- $H(\gamma, p) = \gamma - \ln\gamma + p - \ln p - 2$. Reconnaissez-vous ce système ?
- $H(\gamma, p) = \dfrac{p^2}{2} - \cos\gamma$. Quelle équation simple de la physique reconnaît-on?