Groupes

Exercice 1. 1) Démontrer le théorème de Lagrange : soit G un groupe fini. Pour tout sous-groupe $H < G$, l'ordre de H divise l'ordre de G.

2) En déduire le petit théorème de Fermat: pour tout entier p premier, et tout entier a, on a $a^p \equiv a \mod p$.

Exercice 2. 1) Démontrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}$ est monogène. Exhiber un sous-groupe de $\mathbf{R}$ qui n'est pas monogène.

2) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Démontrer que

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \mathrm{pgcd}(a,b)\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = \mathrm{ppcm}(a,b)\mathbf{Z}.$$

3) a) Démontrer le théorème de Bezout : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
b) Soit $d \in \mathbf{Z}$. Est-il vrai que $\mathrm{pgcd}(a,b) = d$ si et seulement si il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = d$?

4) Soit a et b deux entiers. On note $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$ et $m = \mathrm{ppcm}(a,b)$.
a) Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbf{Z}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$.
b) Montrer que $m = ab' = a'b$.
c) Montrer que $md = ab$.

Exercice 3. 1) Déterminer tous les sous-groupes des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. Lesquels sont des sous-groupes distingués ?

2) Déterminer un morphisme non constant du groupe $\mathfrak{S}_4$ dans le groupe $\mathfrak{S}_3$.

3) Vérifier que le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ possède deux sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{A}_4$ et $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ respectivement. En déduire que $\mathfrak{A}_5$ et $\mathfrak{A}_4 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ sont isomorphes comme ensembles. Sont-ils isomorphes en tant que groupes ?

4) Vérifier l'existence des suites de sous-groupes distingués suivantes :
a) $\{1\} = \mathfrak{A}_2 \triangleleft \mathfrak{S}_2 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;
b) $\{1\} \triangleleft \mathfrak{A}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \triangleleft \mathfrak{S}_3$;
c) $\{1\}s \triangleleft \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \triangleleft V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ (V_4 est le groupe de Klein $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).