Intégration

Exercice 1. Pour chacune des fonctions f suivantes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge-t-elle?

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sin x^2$.
3. $f(x) = \cos x^2$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^\beta x^\alpha}$.
5. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour chaque fonction f de l'exercice 1, indiquer si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge.

Exercice 3. Soit $f :]0,1[\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4}{t^2}x \text{ si } x \in [0, \dfrac{t}{2}], \\ \dfrac{4}{t^2}(t-x) \text{ si } x \in]\dfrac{t}{2}, t], \\ 0 \text{ si } x \in]t, 1]. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, $f(t,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$. On pose
$$F(t) = \int_0^1 f(t,x)\,dx.$$
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$.
3. Montrer que $F(t) \not\to 0$ lorsque $t \to 0^+$. Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres ?

Exercice 4. Quelques calculs d'intégrales plus ou moins usuelles (on justifiera d'éventuelles interversions).

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ et en déduire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{[n\pi,(n+1)\pi]\times\mathbb{R}_+} e^{-xy}\sin x dxdy$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.
3. (plus difficile) Exprimer les intégrales
$$a(t) := \int_{[0,t]^2} \sin(x^2+y^2)dxdy, \quad b(t) := \int_{[0,t]^2} \cos(x^2+y^2)dxdy$$
de deux manières différentes. On pose alors $I(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T a(t)dt$, $J(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T b(t)dt$. Etudier les limites de $I(T)$ et $J(T)$ quand $T \to +\infty$, en déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$.

Exercice 5. Considérons l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda^2 t)}}$.

1. Montrer que $I(\lambda)$ est bien définie pour $0 < \lambda < 1$.
2. Montrer que $I(\lambda)$ tend vers $+\infty$ quand $\lambda \to 1^-$.
3. (plus difficile) Montrer que $I(\lambda) \sim_{\lambda \to 1^-} -\ln(1-\lambda)$.

Exercice 6. On définit une fonction f par l'expression

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+(t/x^2))}\, dx.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} f(t)$$

   et en déduire l'expression de $f(t)$.

Exercice 7. En dérivant sous l'intégrale, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t} e^{-t} dt$. On justifiera le procédé.