Probabilités

Feuille corrigée lors de la première séance de TD, mercredi 25 septembre 2019.

Exercice 1 (Loi discrète).
Soit $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, i.e. à valeurs entières et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

1. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \lambda$. *L'espérance* $\mathrm{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(X = k)k$
2. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. *La variance* $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
3. Montrer que la fonction génératrice $g_\lambda(s) = \mathrm{E}(s^X) = e^{\lambda(s-1)}$.
4. Soit X et Y deux variables indépendantes, $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ et $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$.
   Montrer que $X + Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$,
   (a) par un calcul direct $\mathrm{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X = k \text{ et } Y = n - k) = \ldots$,
   (b) en calculant la fonction génératrice de $X + Y$.
5. Soit $Z = \sum_{i=1}^{X} Y_i$, pour $X, Y_1, Y_2, \ldots$ famille indépendante, les $Y_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, $p \in]0, 1]$, i.e. $\mathrm{P}(Y_i = 1) = p$ et $\mathrm{P}(Y_i = 0) = 1 - p$, et la somme vide $\sum_{i=1}^{0} = 0$.
   Montrer par les deux méthodes comme ci-dessus que $Z \sim \mathrm{Poisson}(p\lambda)$.

Exercice 2 (Loi à densité).

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, i.e. admettant la densité $f_{\sigma^2}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ pour laquelle $\int_{\mathbb{R}} f_{\sigma^2} = 1$.

1. Calculer $\mathrm{E}(X)$. *L'espérance* $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x \,\mathrm{d}x$
2. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.
3. Montrer que la fonction caractéristique $\psi_{\sigma^2}(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = e^{-\sigma^2 t^2/2}$, par exemple en établissant une équation différentielle en ψ_{σ^2}.
4. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes, $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.
   Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$,
   (a) en calculant la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$.
   (b) par le calcul direct pour ϕ bornée mesurable de
   $\mathrm{E}(\phi(X_1 + X_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_1^2}(x_1) f_{\sigma_2^2}(x_2)\phi(x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \ldots$
   Il s'agit d'obtenir $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(z)\phi(z)\,\mathrm{d}z$*, ce qui identifie la loi de* $X_1 + X_2$ *et on peut vérifier au préalable que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$.
5. Pour $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, montrer que X_1/X_2 suit la loi de Cauchy de densité $\dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

6. Si Z suit la loi de Cauchy, qu'en est-il de $1/Z$?

Exercice 3 (Convergence en loi, somme de Riemann)**.**

Soit X_n uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, montrer que X_n/n converge en loi vers une uniforme sur $[0, 1]$ lorsque $n \to \infty$.

Il s'agit de montrer $\mathrm{E}(\phi(X_n/n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \phi(x) \, \mathrm{d}x$*, pour toute* ϕ *continue bornée.*