Géométrie affine et euclidienne
Exercices préparatoires

Cette feuille d'exercices contient la plupart des définitions nécessaires à la résolution des exercices. Il sera cependant parfois utile de s'aider d'un cours de géométrie affine et euclidienne et il ne faut pas hésiter à le faire.

1 Un peu d'algèbre linéaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On note E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Exercice 1. 1. Rappeler la définition d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel.

2. L'intersection, la réunion, la somme d'une famille (finie ou non) de sous-espaces vectoriels est-elle un espace vectoriel ? Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2. 1. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.

(a) Rappeler la définition de projection p de E sur F parallèlement à G.

(b) Montrer que p est linéaire. Déterminer ensuite son noyau et son image. La projection p est-elle injective, surjective ?

(c) Vérifier que $p \circ p = p$.

(d) Montrer qu'il existe une base naturelle de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

(e) Soit q la projection de E sur G parallèlement à F. Quel lien existe-t-il entre p et q ?

2. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$. Prouver que $E = \mathrm{im} f \oplus \ker f$ et que f est la projection sur $\mathrm{im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Exercice 3. Avec les notations de l'exercice précédent, l'application $s = 2p - \mathrm{id}$ s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, montrer que $s(x) = y - z$.
2. Établir les analogues des résultats de l'exercice précédent.

2 Géométrie affine

Un espace affine est un couple $(\mathcal{E}, E)$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble de points et E un espace vectoriel. L'ensemble de vecteurs E agit sur l'ensemble des points $\mathcal{E}$ via $\mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$, $(A, \vec{x}) \mapsto A + \vec{x}$, de façon libre et transitive.

Exercice 4. Pour tous A, B, C et D points d'un espace affine $\mathcal{E}$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5. Soient $(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine.

1. Rappeler la définition d'application affine.
2. Montrer que f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si l'application vectorielle $\vec{f}$ associée à f l'est.

Exercice 6. On appelle translation de vecteur $\vec{x} \in E$ une application affine $t_{\vec{x}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $A \mapsto A + \vec{x}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Pour tous $\vec{x}$, $\vec{y} \in E$, on a $t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{y}} = t_{\vec{x}+\vec{y}} = t_{\vec{y}} \circ t_{\vec{x}}$.
2. Pour tout $\vec{x} \in E$, l'application $t_{\vec{x}}$ est bijective, d'inverse $(t_{\vec{x}})^{-1} = t_{-\vec{x}}$.
3. Pour toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{f}(\vec{x})} \circ f$.
4. Pour tout couple $(A, B) \in E \times E$, il existe une unique translation t telle que $t(A) = B$.

Exercice 7. Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$ (distincts ou non). On note s_A (resp. s_B) la symétrie affine de centre A (resp. B). Déterminer la composée $s_B \circ s_A$.

3 Géométrie euclidienne

Soit (E, φ) un espace euclidien (c'est-à-dire un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$). On dit que l'application $u : E \to E$ est orthogonale si pour tous $\vec{x}$, $\vec{y} \in E$, on a $\varphi(u(\vec{x}), u(\vec{y})) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$. On note $O(\varphi)$ le groupe orthogonal et $O(n)$ les matrices orthogonales de taille n.

Exercice 8. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme et $u^* : E \to E$ son adjoint (relativement à φ).

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes valeurs propres.
2. Établir l'identité $\ker u^* = (\mathrm{im} u)^\perp$.
3. On suppose que u est normal, c'est-à-dire que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   (a) Citer deux exemples d'endomorphismes normaux.
   (b) Montrer que : $\forall \vec{x} \in E$, $||u(\vec{x})|| = ||u^*(\vec{x})||$.
   (c) En déduire l'égalité $\ker u = \ker u^*$ puis la décomposition $E = \ker u \oplus \mathrm{im} u$.

Exercice 9. 1. Montrer que $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix},\ a,\, b \in \mathbb{R},\, \varepsilon \in \{\pm 1\},\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

2. En déduire les descriptions de $SO(2)$ et $O^-(2)$ en fonction de matrice en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. ainsi que le fait que $O^-(2)$ est l'ensemble des matrices diagonalisables de $O(2)$ ayant pour valeurs propres 1 et -1.
3. Démontrer que les groupes $SO(2)$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ sont isomorphes.

4 Géométrie affine et euclidienne

On considère maintenant un espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E, \varphi)$, c'est-à-dire un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ muni d'une structure euclidienne (E, φ).

Exercice 10. 1. Soit $\overrightarrow{H} = (\mathbb{K}\vec{a})^\perp$ un hyperplan de E. On note $\sigma_{\vec{a}}$ la réflexion vectorielle d'hyperplan $(\mathbb{K}\vec{a})^\perp$. Rappeler la définition de $\sigma_{\vec{a}}$ et décrire sa valeur en $\vec{x}$ en fonction de φ, $\vec{a}$ et $\vec{x}$. Représenter à l'aide d'un dessin cette application.

2. Montrer que $\sigma_{\vec{a}}$ est une application orthogonale (on pourra par exemple calculer sa matrice dans une base orthonormée bien choisie).
3. Soient H un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ et $\vec{a}$ un vecteur de E tel que $\overrightarrow{H}^\perp = \mathbb{R}\vec{a}$. On note σ_H la réflexion d'hyperplan H, c'est-à-dire une isométrie affine admettant au moins un point fixe A et vérifiant $E_1(\overrightarrow{\sigma_H})^\perp = \mathbb{R}\vec{a} = E_{-1}(\overrightarrow{\sigma_H})$. Décrire $\sigma_H(B)$ en fonction de B, $\overrightarrow{AB}$, φ et $\vec{a}$. Représenter graphiquement cette application.
4. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans affines du plan affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.
   (a) Supposons $\overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{H_2}$. Décrire la transformation $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$.
   (b) On suppose maintenant $\overrightarrow{H_1} \neq \overrightarrow{H_2}$. Décrire la transformation $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$.
   (c) Généraliser les questions précédentes à un espace affine de dimension quelconque.